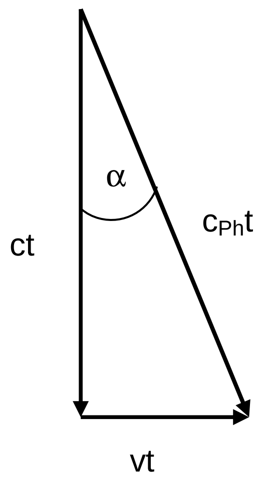
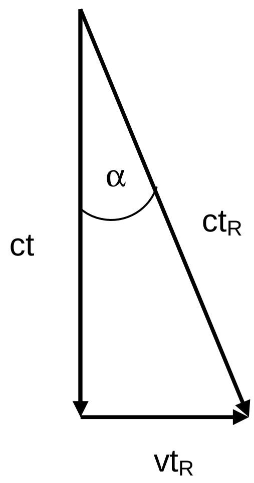
2. Der gemeinsame Kosinus

In der praktischen Sternbeobachtung wird der Aberrationseffekt durch Neigung des Fernrohrs um eben jenen Winkel ausgeglichen, um den die Richtungen von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit differieren. Ob Aberration besser mit Wellengesetzen der Physik oder relativistischer Deutung (Zeitdehnung) der Mathematiker erklärt werden kann, interessiert den Astronomen weniger – sein Ziel ist zunächst, ein korrekt dargestelltes Bild eines fernen Objektes bei Ausschaltung aller bekannten Störeinflüsse zu erhalten.
Mit der Neigung des Fernrohrs (und damit der Sichtlinie) werden zwei Korrekturen notwendig.
Zum einen verändert sich die Lage des Sternes am Himmel, so dass der Astronom diesen Neigungswinkel α bei der Ortsbestimmung berücksichtigen muss. Dies geschieht mit klassischer Mathematik (Trigonometrie) und dürfte unstrittig sein.
Zum anderen verändert sich die Wellenlänge der beobachteten Strahlung zu größeren Wellenlängen hin (Rotverschiebung). Wie lässt sich das erklären? Die zwei zur Auswahl stehenden Korrekturmethoden lassen sich als physikalisch-klassisch bzw. mathematisch-relativistisch qualifizieren.
Der folgende Vergleich soll zeigen, wo die Unterschiede aber auch die Gemeinsamkeiten beider Methoden liegen.

Physikalische Korrektur (klassisch)	Mathematische Korrektur (relativistisch)
 c_{Ph} … Phasengeschwindigkeit	 t_R … gedehnte Zeit
r Die unterschiedlich langen Strecken ct und $c_{Ph}t$ werden in gleichen Zeiten t mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten c bzw. c_{Ph} durchlaufen.	Die unterschiedlich langen Strecken ct und ct_R werden in unterschiedlichen Zeiten t bzw. t_R mit gleichen Geschwindigkeiten c durchlaufen.
$\cos\alpha = ct/c_{Ph}t = c/c_{Ph}$ $c = c_{Ph}\cos\alpha$ (1)	$\cos\alpha = ct/ct_R = t/t_R$ $t = t_R\cos\alpha$ (3)
$c^2 = c_{Ph}^2 - v^2$ $c^2 = c_{Ph}^2\,(1-v^2/c_{Ph}{}^2)$ $c = c_{Ph}\sqrt{1-v^2/c_{Ph}{}^2}$ (2)	$c^2t^2 = c^2\,t_R^2 - v^2t_R^2$ $ct = ct_R\sqrt{1-v^2/c^2}$ $t = t_R\sqrt{1-v^2/c^2}$ (4)
$c < c_{Ph}$, Korrektur der Geschwindigkeit	$t < t_R$, Korrektur der Zeit
(2) in (1) einsetzen ergibt $\cos\alpha = \sqrt{1-v^2/c_{Ph}{}^2}$	(4) in (3) einsetzen ergibt $\cos\alpha = \sqrt{1-v^2/c^2}$

$$\sqrt{1-v^2/c_{Ph}{}^2} \;=\; \mathbf{\cos\alpha} \;=\; \sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (5)$$

Physikalisch-klassische und mathematisch-relativistische Korrektur führen letztlich beide auf denselben Faktor cosα.

Halten wir fest:
Die Aberration ist ein Phänomen, das allein vom Winkel α abhängig ist bzw. mit dem Korrekturfaktor cos α korrigiert werden muss. Für die Praxis ist es deshalb unerheblich, ob die klassische oder die relativistische Erklärung herangezogen wird - die unterschiedlichen Wurzeln als Korrekturfaktoren sind beide identisch mit cosα.

Hinweis:
Traditionell wird eine Tangensbeziehung als Aberrationsformel verwendet.

$$\tan\alpha = \frac{v}{c_{Med}}\,.$$

Man sieht sofort, dass bei Änderung des Mediums im Fernrohr (z.B. Wasser statt Vakuum) die Aberration für gleiche Fernrohrgeschwindigkeit v einen anderen Wert annimmt. Experimente bestätigen das aber nicht – auch im wassergefüllten Rohr bleibt der Winkel α unter sonst gleichen Bedingungen konstant.
Aus relativistischer Sicht löst sich der Widerspruch durch Zeitdehnung und Längenkontraktion: In Bewegungsrichtung verkürzt sich der zurückgelegte Weg und die verstrichene Zeit wird länger. Der Geschwindigkeitsquotient v wird dadurch der geringeren Lichtgeschwindigkeit c_{Med} im Medium angepasst, so dass die Tangensbeziehung dann korrekt die Aberration beschreibt.

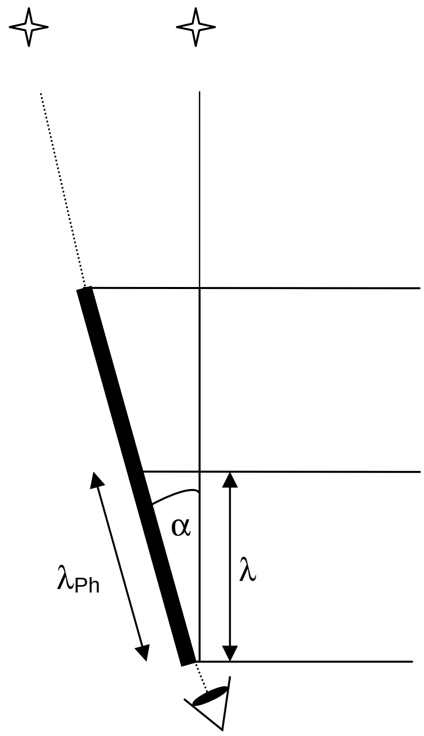
Aus physikalischer Sicht geht man zu einer Kosinusfunktion über.

$$\cos\alpha = \frac{c_{Med}}{c_{Ph}} = \frac{\lambda_{Med}}{\lambda_{Ph}} = \sqrt{1 - v^2 / c_{Ph}{}^2}$$

Der Aberrationswinkel α kann hier statt über Geschwindigkeitsverhältnisse auch über das Wellenlängenverhältnis $\lambda_{Med}/\lambda_{Ph}$ ausgedrückt werden. Da beide Wellenlängen im selben Medium gemessen werden, ändert sich ihr Verhältnis auch bei Austausch des Mediums nicht.

Die Kosinusbeziehung $\cos\alpha = \frac{\lambda_{Med}}{\lambda_{Ph}}$ als Verhältnis zweier Längen abstrahiert von bewegten Körpern als Ursache des Phänomens, so dass Geschwindigkeitsbetrachtungen und damit Zeitdehnung und Längenkontraktion gegenstandslos werden – zumindest für die betrachtete Aberration.

Das legt folgenden Gedanken nahe:
Die Relativitätstheorie schien notwendig zu werden, um die Elektrodynamik Maxwells auch auf bewegte Körper anwenden zu können. Wenn aber Bewegung keine zwingende Voraussetzung für das beobachtete Phänomen sein sollte, so wäre zu zeigen, unter welchen Umständen auch zwischen zueinander ruhenden Systemen Korrekturen nötig sein können.



Die ebenen Wellen des Lichts von einem Fixstern werden von einem ruhenden (also nicht mit der Erdbewegung mitgeführten) Beobachter bei senkrechter Betrachtung ($\alpha = 0$) mit der Wellenlänge λ registriert. Fallen die Wellenfronten auf ein mit $\alpha > 0$ geneigtes Hindernis, so läuft an diesem entlang eine Phasenwelle mit $\lambda_{Ph} > \lambda$. Um diese Phasenwelle zu registrieren, muss der Beobachter seine Sichtlinie um den Winkel α neigen. Ein Punkt der (Phasen-)Wellenfront läuft in derselben Zeit am längeren Hindernis entlang wie ein senkrecht laufender Punkt die kürzere lotrechte Strecke durchläuft. Es stellt sich wieder die Frage: Haben wir es mit zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten $c < c_{Ph}$ oder mit unterschiedlichen Zeiten $t < t_R$ zu tun?
Die übliche Erklärung der Relativisten, in bewegten Systemen vergehe die Zeit langsamer, kann hier nicht gelten. Sowohl Fixstern wie Beobachter ruhen und führen laut Voraussetzung keine Relativbewegung zueinander aus. Langsamer gehende Uhren sind hier nach $t = t_R \sqrt{1-v^2/c^2}$ (Lorentz-Transformation) auszuschließen, da bei Relativgeschwindigkeit $v = 0$ die Zeiten $t = t_R$ identisch sind. Wo sollte auch eine Uhr platziert werden, die als bewegt gelten kann?
Die oben abgeleitete Gleichung (5) impliziert zunächst für beide Versionen eine Abhängigkeit des Winkels von der Fernrohrgeschwindigkeit v. Für $v = 0$ wird $\cos\alpha = 1$ und damit $\alpha = 0$. Die relativistische Version lässt keine andere Möglichkeit zu, da sie zur Erklärung einer Elektrodynamik *bewegter* Körper geschaffen wurde und deshalb v im Korrekturfaktor enthalten muss.

$$\boxed{c/c_{Ph} = \lambda/\lambda_{Ph} = \sqrt{1-v^2/{c_{Ph}}^2} = \mathbf{\cos\alpha} = \sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Die physikalisch-klassische Version kann den Wurzelausdruck, der v enthält, auch durch c/c_{Ph} bzw. λ/λ_{Ph} ersetzen. Damit ist der Winkel α nicht mehr zwingend von einer Systemgeschwindigkeit abhängig, sondern beschreibt allgemeiner lediglich die Lagebeziehung zweier Vektoren (Lichtgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit)

bzw. zweier Wellenlängen. Damit lassen sich aber auch verschiedene Wahrnehmungen bezüglich zweier Systeme korrigieren, die gegeneinander in Ruhe sind.
In der physikalisch-klassischen Erklärung kann v sowohl als Fernrohrgeschwindigkeit, aber auch als Geschwindigkeit eines scheinbar von links nach rechts wandernden mathematischen Punktes auf einer Wellenfront aufgefasst werden. Diese kommt allein durch die Wellenbewegung z.B. entlang eines Hindernisses zu Stande, hat aber nichts mit einer Körper- bzw. Systemgeschwindigkeit zu tun. Damit hat v jetzt eine allgemeinere Bedeutung. Die Kosinusbeziehung macht auch bei zueinander ruhenden Systemen Sinn, denn die rein fiktive Geschwindigkeit v eines mathematischen Punktes kann hier verschieden von Null sein: $\cos\alpha = c/c_{Ph} = \lambda/\lambda_{Ph} = \sqrt{1-v^2/c_{Ph}{}^2}$.
Die relativistische Erklärung hingegen setzt eine Körper- bzw. Systemgeschwindigkeit v voraus und erweist sich hier als ungeeignet.

Wie der Vergleich zwischen klassischer und relativistischer Korrektur zeigt (siehe Tabelle), können letztlich beide auf denselben Faktor $\cos\alpha$ zurückgeführt werden. Der Streit zwischen Verfechtern und Kritikern der Relativitätstheorie kann sich deshalb nur darauf beschränken, ob man eher den durch Erfahrung gewonnenen Begriffen der klassischen Physik vertrauen soll (wobei nachweislich $c < c_{Ph}$ sein kann), oder ob man den Axiomen der Mathematiker „als freien Schöpfungen des menschlichen Geistes“ (Einstein) den höheren Erklärungswert einräumt – damit allerdings Zeitdehnung und Längenkontraktion als logische Konsequenz akzeptieren muss.